



Autour du laplacien sur des domaines présentant un caractère fractal

Nizar Riane, Claire David

► To cite this version:

Nizar Riane, Claire David. Autour du laplacien sur des domaines présentant un caractère fractal. 2016. hal-01359154

HAL Id: hal-01359154

<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01359154>

Preprint submitted on 1 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Autour du laplacien sur des domaines présentant un caractère fractal

Nizar RIANE *, Claire DAVID †

23/08/2016

Table des matières

1	Introduction	2
2	Analyse sur les fractales	2
2.1	Fractale : préliminaires	2
2.2	Les ensembles autosimilaires	3
2.3	Laplacien sur les ensembles finis, forme de résistance et structure harmonique	5
2.4	Construction du laplacien sur des ensembles autosimilaires	10
3	Application à quelques structures autosimilaires	11
3.1	Application à l'ensemble autosimilaire $[0, 1]$	12
3.2	Application au triangle de Sierpiński	13
3.3	Application au graphe de la fonction de Weierstrass	15
3.4	Mise en œuvre sous Mathematica	19
A	Annexes	23
A.1	Espace mesuré	23
A.2	Formes de Dirichlet	23

*Laboratoire Jaques-Louis Lions

†Laboratoire Jaques-Louis Lions

1 Introduction

Qu'est ce qu'une fractale ? Il n'existe pas de réponse définitive qui fasse l'unanimité chez les mathématiciens, mais on se réfère en général à un ensemble \mathcal{F} qui a les propriétés suivantes [3] :

1. \mathcal{F} a une structure assez détaillée et irrégulière pour être décrite par la géométrie traditionnelle, localement et globalement.
2. Souvent \mathcal{F} a une structure autosimilaire, et sa dimension topologique est inférieure à sa dimension fractale.
3. Dans la plupart des cas, \mathcal{F} est défini récursivement.

L'étude de cette classe d'objets n'est pas seulement le résultat d'une réflexion mathématique abstraite, il a été prouvé que des éléments du monde physique présentent un caractère fractal. On pourra penser aux frontières côtières de l'Angleterre, à la turbulence d'un fluide, ou au graphe du prix d'un actif financier ...

Outre l'intérêt géométrique des fractales, il existe un intérêt analytique, et on pourrait aussi se demander comment se propage une onde dans un domaine fractal ?

La réponse à cette question n'est pas triviale, elle demande une démarche constructive qui justifie l'existence d'objets analytiques tels que le laplacien. Le but de ce travail est de présenter, dans un premier temps, une généralisation du laplacien proposée par J. Kigami [5] et Strichartz [9]. Des applications numériques, sur des cas particuliers d'ensembles présentant une structure autosimilaire, sont ensuite développées.

2 Analyse sur les fractales

Le laplacien occupe une place majeure dans l'étude des équations aux dérivées partielles, mais on travaille, en général, sur des domaines réguliers.

Dans ce qui suit, nous considérons la formulation alternative du laplacien proposée par J. Kigami [5] sur des ensembles plus compliqués, présentant un caractère fractal.

2.1 Fractale : préliminaires

B. Mandelbrot [7] définit un ensemble fractal comme étant un ensemble dont la dimension de Hausdorff est supérieure à sa dimension topologique. Cette définition ne fait pas l'unanimité chez les mathématiciens, par exemple, K. Falconer [3] considère que cette définition est restrictive et que la notion de fractale est plus large et ne peut être caractérisée d'une manière précise ...

Dans ce travail, nous nous limiterons à une classe particulière d'ensembles fractals (les ensembles autosimilaires), et pour cette raison nous utiliserons la définition de B. Mandelbrot. Il est alors essentiel de définir la notion de dimension topologique ainsi que la dimension de Hausdorff.

Définition 2.1. La *dimension topologique* d'un espace topologique (X, Θ) est la valeur minimale d'un entier naturel n tel que tout recouvrement de X par des ouverts ne puissent admettre un recouvrement plus fin dans lequel un point appartient à plus de $n + 1$ ouverts.

Un espace qui n'a pas de recouvrement de dimension inférieure ou égale à n pour tout entier n , est dit de dimension infinie.

Cette définition implique en particulier que :

1. deux espaces homéomorphes ont la même dimension ;
2. \mathbb{R}^n est de dimension n .

La définition de la dimension de Hausdorff repose sur la notion de mesure de Hausdorff.

Définition 2.2. Mesure de Hausdorff

Soit F un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On définit :

1. un δ -recouvrement : comme étant une famille d'ensembles de diamètre $\delta > 0$ tel que $F \subset \cup_{i=0}^{\infty} U_i$.

$$2. H_\delta^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i^s| : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\}.$$

La mesure de Hausdorff de dimension s est la quantité :

$$H^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s$$

Cette mesure a des propriétés immédiates.

Définition 2.3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $U \in O(n)$ (groupe des isométries sur \mathbb{R}^n) et $r > 0$. On appelle similitude l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}^n$ associe

$$f(x) = rU(x) + a$$

Proposition 2.1. Soit S une similitude de rapport $\lambda > 0$. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ alors

$$H^s(S(F)) = \lambda^s H^s(F)$$

Démonstration. Si U_i est un δ -recouvrement de F pour $i \in J$, alors $S(U_i)$ est un $\lambda\delta$ -recouvrement de $S(F)$. Donc

$$\sum_{i \in J} |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum_{i \in J} |U_i|^s$$

En prenant l'infimum

$$H_{\lambda\delta}^s(S(F)) \leq \lambda^s H_\delta^s(F)$$

et en passant à la limite $H^s(S(F)) \leq \lambda^s H^s(F)$. on remplace S par S^{-1} , λ par λ^{-1} , et F par $S(F)$ on obtient l'inégalité opposée. \square

Proposition 2.2. soit F un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Alors pour tout $t > s$

$$H^s(F) \geq H^t(F)$$

Démonstration. Cela découle directement de

$$\sum_{i \in J} |U_i|^t \leq \sum_{i \in J} |U_i|^{t-s} \sum_{i \in J} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in J} |U_i|^s$$

\square

Définition 2.4. On appelle dimension de Hausdorff-Besicovitch de l'ensemble F la valeur

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$$

La dimension de Hausdorff-Besicovitch est égale à la dimension topologique pour les variétés de classe C^1 .

Il est temps d'explorer une catégorie particulière des ensembles fractals : les ensembles autosimilaires.

2.2 Les ensembles autosimilaires

Dans ce qui suit, N et n désignent deux entiers naturels non nuls.

Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Une fonction $S : D \rightarrow D$ est une contraction stricte sur D s'il existe une constante $c \in]0, 1[$ telle que pour tout $(x, y) \in D^2$:

$$|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$$

Théorème 2.3. Hutchinson

Soient $\{f_1, \dots, f_N\}$ une famille de contractions strictes sur $D \subset \mathbb{R}^n$ pour $N \in \mathbb{N}$, telle que

$$\forall (x, y) \in D^2 : |f_i(x) - f_i(y)| \leq c_i |x - y|$$

alors il existe un unique compact non vide K de D qui vérifie $K = \cup_{i=1}^N f_i(K)$. K est appelé ensemble autosimilaire (attracteur ou invariant) par rapport à la famille $\{f_1, \dots, f_N\}$.

Définition 2.5. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $r > 0$. On appelle r -voisinage de $A \subset E$ l'ensemble :

$$V_r(A) = \{x \in E, d(x, A) < r\}$$

On définit la distance de Hausdorff entre deux compacts A et B de E par :

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0, A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\}$$

Soit $K(E)$ la famille des sous-ensembles compacts de E , si (E, d) est complet alors $(K(E), d_H)$ est complet. (voir [5])

Démonstration. On considère la famille $K(D)$ et on définit la fonction $F : K(D) \rightarrow K(D)$ par $F(A) = \cup_{i=1}^N f_i(A) \quad \forall A \in K(D)$. Les f_i sont continues, donc F est bien à valeurs dans $K(D)$. On va montrer que F est une contraction pour la distance de Hausdorff.

Soit $c = \max(c_1, \dots, c_N) < 1$, et soit $(A, B) \in K(D) \times K(D)$, on montre que

$$d_H(F(A), F(B)) \leq c d_H(A, B)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $y \in F(A)$, il existe un entier naturel i tel que $i \leq n$, et un élément $x \in A$ tel que $y = f_i(x)$. Soit alors $x' \in B$ tel que $d(x, x') \leq d_H(A, B) + \frac{\varepsilon}{c}$. Ainsi, si on note $y' = f_i(x')$, on a :

$$d(y, y') = d(f_i(x), f_i(x')) \leq c_i d(x, x') < c d_H(A, B) + \varepsilon$$

Ainsi, comme $F(A)$ et $F(B)$ jouent des rôles symétriques, on a

$$d_H(F(A), F(B)) \leq c d_H(A, B) + \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers zéro on obtient $d_H(F(A), F(B)) \leq c d_H(A, B)$.

Comme l'espace $(K(D), d_H)$ est complet, on conclut par le théorème du point fixe de Picard. \square

Le couple $(K, \{f_1, \dots, f_N\})$ est appelé système autosimilaire.

Considérons le cas où les $\{f_1, \dots, f_N\}$ sont des similitudes, nous avons une propriété immédiate en terme de dimension de Hausdorff.

Proposition 2.4. Considérons l'ensemble autosimilaire $K = \cup_{i=1}^N f_i(K)$ où chaque f_i est une similitude de rapport r_i et telle que l'union soit disjointe, alors la dimension de Hausdorff est solution de

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = 1$$

En particulier, si $c_1 = \dots = c_N = c$, on obtient

$$\dim_H(K) = -\frac{\ln(N)}{\ln(c)}$$

2.3 Laplacien sur les ensembles finis, forme de résistance et structure harmonique

Nous arrivons au cœur de ce travail, nous allons justifier la construction de l'opérateur laplacien sur des ensembles fractals, et en particulier, sur les ensembles autosimilaires.

Cette construction va s'appuyer sur plusieurs concepts issus de l'analyse fonctionnelle, que nous devons introduire progressivement. Mais avant de procéder, rappelons une formule classique.

Soit $(u, v) \in C_c^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Alors :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) dx$$

Cette relation donne un lien direct entre le laplacien et la forme de Dirichlet, deux notions que nous allons introduire immédiatement, mais dans un cadre plus général :

Définition 2.6. Forme de Dirichlet

Soit (X, μ) un espace mesuré, et soit $\mathcal{E} : D \rightarrow D$ une forme bilinéaire, hermitienne, semi-définie positive, telle que

1. Le domaine D est dense dans $L^2(X, \mu)$.
2. D , muni du produit scalaire

$$\forall (u, v) \in D^2 \quad (u, v)_{\mathcal{E}} = (u, v)_{L^2(X, \mu)} + \mathcal{E}(u, v)$$

est un espace hilbertien.

3. La forme \mathcal{E} vérifie la propriété de Markov :

$$\mathcal{E}(\bar{u}, \bar{u}) \leq \mathcal{E}(u, u)$$

où $\bar{u} = \max\{1, \min\{u, 0\}\}$. La forme \mathcal{E} s'appelle forme de Dirichlet.

On renvoie à l'annexe pour une définition alternative de cette forme.

La définition ci-dessus peut être adaptée à des ensembles finis. Soit V un tel ensemble, et soit $l(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions de V à valeurs réelles. On le munit du produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in l(V), \quad (u, v) = \sum_{p \in V} u(p) v(p)$$

Définition 2.7. Soit V un ensemble fini. Une forme \mathcal{E} bilinéaire, symétrique sur $l(V)$, est dite de Dirichlet sur V si :

1. $\mathcal{E}(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in l(V)$.
2. $\mathcal{E}(u, u) = 0$ si et seulement si u est constante sur V .
3. \mathcal{E} vérifie la propriété de Markov.

On désignera par $\mathcal{DF}(V)$ la collection des formes de Dirichlet sur V , et par $\widetilde{\mathcal{DF}}(V)$ la collection de celles qui ne vérifient pas la propriété de Markov.

On introduit désormais le laplacien sur V .

Définition 2.8. Un opérateur symétrique linéaire $H : l(V) \rightarrow l(V)$ est appelé laplacien sur V si

1. H est semi-défini négatif.
2. $Hu = 0$ si et seulement si u est constante sur V .
3. Soit $\mathbf{1}_x$ la fonction indicatrice de x :

$$H_{pq} := (H\mathbf{1}_q)(p) \geq 0 \quad \forall p \neq q \in V$$

On note de même $\mathcal{LA}(V)$ la collection des laplaciens sur V , et $\widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ la collection de ceux d'entre eux qui ne vérifient pas la propriété 3.

Il existe une correspondance naturelle entre $\mathcal{DF}(V)$ et $\mathcal{LA}(V)$. Si $H : l(V) \rightarrow l(V)$ est un opérateur linéaire symétrique, on peut définir la forme quadratique $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$ sur $l(V)$ par

$$\forall (u, v) \in l(V)^2 \quad \mathcal{E}_H(u, v) = -(u, Hv)$$

L'application $\pi(H) = \mathcal{E}_H$ définit une bijection entre la classe des opérateurs linéaires symétriques et la classe des formes quadratiques symétriques.

On peut démontrer que π définit une bijection entre $\widetilde{\mathcal{DF}}(V)$ et $\widetilde{\mathcal{LA}}(V)$, et que

$$\pi(\mathcal{DF}(V)) = \pi(\mathcal{LA}(V))$$

Voir [5].

Soit V un ensemble fini et H un laplacien sur V , le couple (V, H) est appelé réseau de résistance (ou r -réseau). En effet, on peut associer un r -réseau à un réseau électrique : pour les bornes $(p, q) \in V^2$, on définit une résistance $r_{pq} = H_{pq}^{-1}$. Si $v \in l(V)$ est un potentiel, l'intensité entre p et q est $i_{pq} = H_{pq}(v(p) - v(q))$, et l'intensité totale au point p est

$$i(p) = (Hv)(p) := \sum_{q \in V} H_{pq}v(q)$$

Soit maintenant $U \subset V$, on cherche une façon appropriée pour restreindre $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}$ à ce sous-ensemble. On décompose H sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} T_U & {}^t J_U \\ J_U & X_U \end{pmatrix}$$

pour les applications $T_U : l(U) \rightarrow l(U)$, $J_U : l(U) \rightarrow l(V \setminus U)$, et $X_U : l(V \setminus U) \rightarrow l(V \setminus U)$. D'où

$$\mathcal{E}_H(u, u) = \mathcal{E}_X(u_1 + X^{-1}Ju_0, u_1 + X^{-1}Ju_0) + \mathcal{E}_{T-{}^t JX^{-1}J}(u_0, u_0) \quad (1)$$

pour $u_0 := u|_U$ et $u_1 := u|_{V \setminus U}$.

Théorème 2.5. *Soit $u \in l(V)$. Définissons $h(u) \in l(V)$ par $h(u)|_U = u$ et $h(u)|_{V \setminus U} = -X^{-1}Ju$. Alors*

$$h(u) = \arg \min_{v \in l(V), v|_U = u} \mathcal{E}_H(v, v)$$

où $\arg \min$ désigne la fonction argument du minimum qui représente l'ensemble des points en lesquels une expression atteint son minimum. Et pour $[H]_U = P_{V,U}(H) := T - {}^t JX^{-1}J$, $[H]_U \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ et :

$$\mathcal{E}_{[H]}(u, u) = \min_{v \in l(V), v|_U = u} \mathcal{E}_H(v, v) \quad (2)$$

De plus, si $H \in \mathcal{LA}(V)$ alors $[H]_U \in \mathcal{LA}(U)$.

Démonstration. Il est immédiat que $\min_{v \in l(V), v|_U = u} \mathcal{E}_H(v, v)$ est atteint si et seulement si $v = h$ et l'équation (2) découle directement de l'équation (1).

Il reste à montrer que $[H]_U \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$. D'une part $\mathcal{E}_{[H]}$ est semi-définie positive. D'autre part l'équation (2) $\mathcal{E}_{[H]}(u, u) = 0$ implique que $h(u)$ est constante sur V et donc u est constante sur U , d'où le résultat.

Finalement, si $H \in \mathcal{LA}(V)$, alors

$$\mathcal{E}_{[H]}(u, u) = \mathcal{E}_H(h(u), h(u)) \geq \mathcal{E}_H(h(\bar{u}), h(\bar{u})) \geq \mathcal{E}_{[H]}(\bar{u}, \bar{u})$$

D'où $[H] \in \mathcal{LA}(U)$. □

Notons que $h(u)$ est l'unique solution de $(Hv)|_{V \setminus U} = 0$ et $v|_U = u$. On peut considérer U comme une frontière de V , et $h(u)$ est appelée une fonction harmonique à valeurs $u \in l(U)$ sur la frontière. Introduisons maintenant le concept de résistance effective associée au laplacien.

Définition 2.9. Soit V un ensemble fini et soit $H \in \widetilde{LA}$. Pour $p \neq q \in V$ on définit

$$R_H(p, q) = (\min\{\mathcal{E}_H(u, u) : u \in l(V), u(p) = 1, u(q) = 0\})^{-1} \quad (3)$$

$$= \max\left\{\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\mathcal{E}_H(u, u)} : u \in l(V), \mathcal{E}_H(u, u) \neq 0\right\} \quad (4)$$

On définit aussi $R_H(p, p) = 0 \quad \forall p \in V$. $R_H(p, p)$ est appelée la résistance effective entre p et q associée à H .

On note désormais pour deux ensemble finis V_i et deux opérateurs $H_i \in \widetilde{LA}(V_i)$ pour $i = 1, 2$: $(V_1, H_1) \leq (V_2, H_2)$ si et seulement si $V_1 \subset V_2$ et $P_{V_2, V_1}(H_2) = H_1$. Dans ce cas, cela implique que $R_{H_1}(p, q) = R_{H_2}(p, q) \quad \forall (p, q) \in V_1 \times V_1$ et $H_i \in LA(V_i) \quad i = 1, 2$. (Voir [5])

La notion de résistance effective permet de définir une métrique sur V . De plus, cette propriété se transmet par passage à la limite.

Théorème 2.6. Soit V un ensemble fini et $H \in LA(V)$. Alors $R_H(., .)$ est une métrique sur V appelée métrique de résistance effective associée à H sur V .

Si $H \in \widetilde{LA}(V)$, alors il en est de même pour $R_H^{1/2}(p, q)$.

Démonstration. Voir [5]. □

Introduisons ensuite la suite de laplaciens discrets.

Définition 2.10. Soit V_m un ensemble fini et $H_m \in \widetilde{LA}(V) \quad \forall m \geq 0$. $\{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ est appelée une suite compatible si $(V_m, H_m) \leq (V_{m+1}, H_{m+1}) \quad \forall m \geq 0$.

Soit $\mathcal{S} = \{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ une telle suite, et posons $V_* = \cup_{m \geq 0} V_m$ et définissons

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \{u : u \in l(V_*), \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{H_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty\} \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{H_m}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) \quad (6)$$

pour $u, v \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$. On définit aussi la résistance effective associée à \mathcal{S} par

$$\forall (p, q) \in V_m \times V_m \quad R_{\mathcal{S}}(p, q) = R_{H_m}(p, q)$$

Cette définition est justifiée par le fait qu'un ensemble autosimilaire peut être approché par une suite croissante d'ensembles finis. On peut alors tenter de construire des formes de Dirichlet et des laplaciens sur cet ensemble comme limite d'une suite adaptée de r -réseaux.

En regardons V_m comme frontière de V_* , et on utilisons les résultats ci-dessus, on pourra démontrer l'existence d'une solution unique du problème

$$\begin{cases} (H_n v_n)|_{V_n \setminus V_m} = 0 & \forall n > m \\ v|_{V_m} = u \end{cases}$$

où $v \in l(V_*)$ et $v_n = v|_{V_n}$. Désignons par $h_m : l(V_m) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{S})$ cette solution, elle vérifie aussi

$$h_m(u) = \arg \min_{v \in \mathcal{F}(\mathcal{S}), v|_{V_m} = u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v)$$

Il s'agit d'une fonction harmonique à valeurs u sur la frontière V_m .

Il résulte aussi que $R_{\mathcal{S}}^{1/2}(p, q)$ est une métrique sur V_* , de plus, si

$$H_m \in \widetilde{LA}(V_m) \quad \forall m \geq 0$$

alors $R_{\mathcal{S}}$ est une métrique sur V_* . On en déduit le lemme suivant :

Lemme 2.7.

$$\forall(p, q) \in V_* \times V_* \quad :$$

$$R_{\mathcal{S}}(p, q) = (\min\{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u) : u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}), u(p) = 1, u(q) = 0\})^{-1} \quad (7)$$

$$= \max\left\{\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u)} : u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}), \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u) > 0\right\} \quad (8)$$

Cela implique que

$$|u(p) - u(q)|^2 \leq R_{\mathcal{S}}(p, q) \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u)$$

pour tout $u \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ et $p, q \in V_*$.

On déduit immédiatement que $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset C(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2}(p, q))$, où $C(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2}(p, q))$ désigne l'espace des fonctions uniformément continues et bornées sur les sous-ensembles bornés. On peut maintenant énoncer des propriétés qui se transmettent par passage à la limite des suites compatibles.

Théorème 2.8.

1. $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset C(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2}(p, q))$.
2. $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ est une forme symétrique, semi-définie positive sur $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. De plus, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u) = 0$ si et seulement si u est constante sur V_* .
3. On définit une relation d'équivalence \sim sur $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ par $u \sim v$ si et seulement si $u - v$ est constante sur V_* . Alors $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ est symétrique, définie positive sur l'espace quotient $\mathcal{F}(\mathcal{S})/\sim$, et $(\mathcal{F}(\mathcal{S})/\sim, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ est un espace de Hilbert.
4. Supposons que $H_m \in LA(V) \quad \forall m \geq 0$. Soit $\bar{u} = \max\{1, \min\{0, u\}\} \quad \forall u \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, alors $\bar{u} \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(\bar{u}, \bar{u}) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u)$.

Démonstration. Il reste à démontrer le point (3). Notons tout de suite que $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, u) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v)$ si et seulement si $u \sim v$. Alors la forme $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ est bien symétrique, définie positive sur $\mathcal{F}(\mathcal{S})/\sim$.

Soit $p \in V_*$ et $\mathcal{F}_p = \{u : u \in \mathcal{F}, u(p) = 0\}$. Alors $(\mathcal{F}(\mathcal{S})/\sim, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ est isomorphe à $(\mathcal{F}_p, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$, et il suffit de montrer que ce dernier est un espace de Hilbert.

Soit $\{v_n\}_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{F}_p, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ et soit $v_n^m = h_m(v_n | V_m)$. Alors

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_k^m - v_l^m, v_k^m - v_l^m) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_k - v_l, v_k - v_l)$$

pour m suffisamment grand, $p \in V_m$. D'où $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ est un produit scalaire pour sur $\mathcal{F}_p \cap l(V_m)$, où $l(V_m)$ est identifié avec $h_m(l(V_m))$. Alors il existe $v^m \in \mathcal{F}_p \cap l(V_m)$ tel que $v_n^m \rightarrow v^m$ pour $n \rightarrow +\infty$. Comme $v_{|V_m}^{m+1} = v^m$, alors il existe $v \in l(V_*)$ tel que $v_{|V_m} = v^m$.

D'autre part, soit $C = \sup_{n \geq 0} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n, v_n)$, alors on a $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v^m, v^m) \leq C$, d'où $v \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$.

On fixe maintenant $\varepsilon > 0$. Alors on peut choisir n tel que

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n - v_k, v_n - v_k) < \varepsilon$$

pour tout $k > n$. On peut aussi choisir m tel que

$$|\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n - v, v_n - v) - \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n^m - v^m, v_n^m - v^m)| < \varepsilon$$

De plus, on peut choisir k tel que $k > n$ et

$$|\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n^m - v_k^m, v_n^m - v_k^m) - \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n^m - v^m, v_n^m - v^m)| < \varepsilon$$

on déduit que $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v_n - v, v_n - v) < 3\varepsilon$, c.q.f.d. □

Donnons maintenant un lien entre la forme de Dirichlet, la métrique de résistance, et une nouvelle application qu'on appelle la forme de résistance.

Définition 2.11. Forme de résistance

Soit X un ensemble. Un couple $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est appelé forme de résistance sur X s'il satisfait les conditions suivantes :

1. \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $l(X)$ contenant les constantes et \mathcal{E} est une forme quadratique symétrique semi-définie positive sur \mathcal{F} . $\mathcal{E}(u, u) = 0$ si et seulement si u est constante sur X .
2. Soit \sim une relation d'équivalence sur \mathcal{F} définie par $u \sim v$ si et seulement si $u - v$ est constante sur X . Alors $(\mathcal{F}/\sim, \mathcal{E})$ est un espace de Hilbert.
3. Pour tout sous-ensemble fini $V \subset X$ et $\forall u \in l(V)$, il existe un $u \in \mathcal{F}$ tel que $u|_V = v$.
4. $\forall p, q \in X$,

$$M(p, q) := \sup \left\{ \frac{|u(p) - u(q)|^2}{\mathcal{E}(u, u)} : u \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(u, u) > 0 \right\} < \infty$$

5. La propriété de Markov : si $u \in \mathcal{F}$, alors $\bar{u} := \max\{1, \min\{0, u\}\} \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}(\bar{u}, \bar{u}) \leq \mathcal{E}(u, u)$

On note $\mathcal{RF}(X)$ la collection des formes de résistance sur X , et $\widetilde{\mathcal{RF}}(X)$ la collection de celles d'entre elles qui ne vérifient pas la propriété de Markov.

Soit V un ensemble fini. Alors $(\mathcal{E}, l(V)) \in \widetilde{\mathcal{RF}}(X)$ (resp. $(\mathcal{E}, l(V)) \in \mathcal{RF}(X)$) si et seulement si $\mathcal{E} \in \widetilde{\mathcal{DF}}(V)$ (resp. $\mathcal{E} \in \mathcal{DF}(V)$).

On déduit alors que $(\mathcal{E}_S, \mathcal{F}(S)) \in \widetilde{\mathcal{RF}}(V_*)$ pour toute suite compatible $S = \{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$. De plus, si $H_m \in \mathcal{LA}(V_m) \ \forall m$, alors $(\mathcal{E}_S, \mathcal{F}(S))$ est forme de résistance sur V_* .

Définition 2.12. Soit un ensemble X . Une fonction $R : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une métrique de résistance sur X si et seulement si pour tout $V \subset X$, il existe $H_V \in \mathcal{LA}(V)$ tel que $R|_{V \times V} = R_{H_V}$, où R_{H_V} est la résistance effective associée à H_V . La collection des métriques de résistance sur X est notée $\mathcal{RM}(X)$. On définit aussi

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{RM}}(X) = \{ & R : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ : \text{ pour tout sous-ensemble fini } V \subset X, \exists H_V \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V) \\ & \text{ avec } R|_{V \times V} = R_{H_V} \text{ et } H_{V_1} = [H_{V_2}]_{V_1} \text{ si } V_1 \subset V_2 \} \end{aligned}$$

Comme R_{H_V} est une métrique sur V , une métrique de résistance est une distance sur X . De plus, pour $R \in \mathcal{RM}(X)$, $\sqrt{R(\cdot, \cdot)}$ est une distance sur X .

Soit V un ensemble fini. $R \in \widetilde{\mathcal{RF}}(V)$ (resp. $R \in \mathcal{RM}(V)$) si et seulement si $R = R_H$ pour un $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ (resp. $H \in \mathcal{LA}(V)$). Et il existe une correspondance naturelle entre les formes de résistance et les métriques de résistance (voir [5]).

Proposition 2.9. Soit $S = \{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ une suite compatible. Alors $(\mathcal{E}_S, \mathcal{F}(S)) \in \widetilde{\mathcal{RF}}(V_*)$ et $R_S \in \widetilde{\mathcal{RM}}(V_*)$.

Démonstration. Soit V un sous-ensemble fini de V_* . Alors $V \subseteq V_m$ pour un certain m . Si $H_V = [H_m]_V$, alors $R|_{H_V} = R_{S|V \times V}$. \square

L'espace V_* est dénombrable, cela implique qu'on va construire des objets analytiques à partir de $(\mathcal{E}_S, \mathcal{F}(S))$, et on termine avec une analyse sur des ensembles dénombrables. Une façon de contourner cette difficulté est de considérer l'espace complété de V_* associé à la métrique $R_S^{1/2}$.

Soit donc $(\Omega_S, R_S^{1/2})$ le complété de $(V_*, R_S^{1/2})$. $\mathcal{F}(S)$ est considérée comme un sous-ensemble de $C(\Omega_S, R_S^{1/2})$. Mais une question se pose alors : peut-on dire que $R_S \in \widetilde{\mathcal{RM}}(\Omega_S)$? et de manière équivalente, $(\mathcal{E}_S, \mathcal{F}(S)) \in \widetilde{\mathcal{RF}}(\Omega_S)$? La réponse est dans le théorème suivant :

Théorème 2.10. Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(X)$. Si (\bar{X}, R) est le complété de (X, R) , où R est la métrique associée à la forme de résistance $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(\bar{X})$ et $R \in \mathcal{RM}(\bar{X})$.

Démonstration. Voir [5]. □

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 2.11. Existence du laplacien

Soit $R \in \widetilde{\mathcal{RM}}$ et soit l'espace séparable $(X, R^{1/2})$. Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ la forme de résistance associée à R , et μ une mesure de Borel sur $(X, R^{1/2})$. supposons que $L^2(X, \mu) \cap \mathcal{F}$ est dense dans $L^2(X, \mu)$ pour la norme L^2 . Alors il existe un opérateur semi-défini positif, autoadjoint H sur $L^2(K, \mu)$ tel que $\text{Dom}(H^{1/2}) = \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}(u, v) = (H^{1/2}; H^{1/2}) \quad \forall u, v \in \mathcal{F}$. De plus, si $\mu(X) < \infty$ et $\int_X R(p, t) \mu(dp) < \infty$ pour un $t \in X$ alors H a une résolvante compacte.

Démonstration. Voir [5]. □

Si on suppose de plus que X est localement compact, alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F} \cap L^2(X, \mu))$ est une forme de Dirichlet sur $L^2(X, \mu)$. De plus, si $\mathcal{F} \cap L^2(X, \mu) \cap C_0(X)$ est dense dans $C_0(X)$ alors $(\mathcal{E}, \mathcal{F} \cap L^2(X, \mu))$ est forme de Dirichlet régulière. Donc si $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ proviennent d'une structure harmonique régulière (voir section suivante) on pourra vérifier les conditions ci-dessus et construire notre forme de Dirichlet et notre Laplacien. Il est clair que $-H$ devrait être notre laplacien.

2.4 Construction du laplacien sur des ensembles autosimilaires

Dans cette section, nous allons définir le laplacien sur des ensembles autosimilaires. Considérons désormais le système autosimilaire $(K, S, \{f_i\}_{i \in S})$, où K est supposé connexe.

L'idée clé pour construire un laplacien sur K est de trouver une suite compatible de r -réseaux sur $\{V_m\}_{m \geq 0}$, d'où on pourra construire une forme de résistance $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et une métrique de résistance R sur V_\star .

Si la fermeture de V_\star par rapport à la métrique R est toujours identifiée à K , on applique directement le théorème d'existence du laplacien et on en déduit que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est une forme de Dirichlet locale et régulière sur $L^2(K, \mu)$ pour toute mesure autosimilaire μ sur K , et on pourra obtenir en conséquence un laplacien associé.

Mais rappelons que nous disposons de deux topologies sur V_\star : la topologie du complété Ω de V_\star donnée par la forme de résistance, et la topologie originale de (K, d) . Le cœur du problème réside dans le fait que Ω est identifié en général à un sous-ensemble de K comme le démontre la proposition suivante (voir [5]) :

Proposition 2.12. *Il existe une injection continue entre Ω et K dont la restriction à V_\star est l'application identité.*

Oublions ce problème un instant et focalisons-nous sur la construction de laplacien sur K . Pour cela on procède comme suit :

Définition 2.13. Soit $D \in \mathcal{LA}(V_0)$ et le vecteur $r = (r_1, \dots, r_N)$, avec $r_i > 0 \quad \forall i \in S$, on définit $W_m = \{1, \dots, N\}^m$ et $\mathcal{E}^{(m)} \in \mathcal{DF}(V_m)$ par

$$\mathcal{E}^{(m)}(u, v) = \sum_{w \in W_m} \frac{1}{r_w} (u \circ F_w, v \circ F_w)$$

pour $u, v \in l(V_m)$, où $r_w = r_{w_1} \dots r_{w_N}$ pour $w = w_1 \dots w_N \in W_m$. $H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ est caractérisé par $\mathcal{E}^{(m)} = \mathcal{E}_{H_m}$.

On peut déduire que

$$\mathcal{E}^{(m+1)}(u, v) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} \mathcal{E}^{(m)}(u \circ F_i, v \circ F_i)$$

pour $u, v \in l(V_m)$. Et $H_m = \sum_{m \in W_m} \frac{1}{r_w} R_w D R_w$, avec $R_w : l(V_m) \rightarrow l(V_0)$ est défini par $R_w f = f \circ F_w$

pour $w \in W_m$. On notera désormais $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}^{(m)}$.

Pour appliquer les résultats de la section précédente, on pourra considérer (V_m, H_m) comme une suite autosimilaire de r -réseaux, et on souhaiterait pour cela qu'elle soit compatible. Pour cela, on introduit les structures harmoniques :

Définition 2.14. (D, r) est appelée structure harmonique si et seulement si $\{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ est une suite compatible de r -réseaux. De plus, (D, r) est dite régulière si $0 < r_i < 1 \quad \forall i \in S$

Un résultat immédiat concerne l'auto-similarité à la limite de $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$:

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i} \mathcal{E}(u \circ F_i, v \circ F_i)$$

On est arrivé à un stade où subsistent deux difficultés : la première est la topologie de Ω versus celle de K , la deuxième est l'existence d'une structure harmonique pour un système autosimilaire. La seconde question est encore ouverte et se réduit à la résolution d'un problème de point fixe (voir [5]) et on va supposer dans la suite qu'une telle structure existe.

Pour résoudre la première difficulté, on utilise la régularité des structures harmoniques, et c'est l'objet du théorème suivant (voir [5])

Théorème 2.13. *Nous avons les équivalences suivantes :*

1. $\Omega = K$
2. (Ω, R) est compact.
3. (Ω, R) est borné.
4. $\forall u \in \mathcal{F}, \sup_{p \in \omega} |u(p)| < \infty$.
5. (D, r) est régulière.

De plus, si (D, r) est régulière, alors R est une métrique sur K compatible avec la métrique initiale.

3 Application à quelques structures autosimilaires

Nous allons construire le laplacien sur des cas particuliers d'ensembles autosimilaires comme limite d'une suite de laplaciens vérifiant des conditions données, pour commencer, on construit une forme de Dirichlet en suivant la démarche décrite au paragraphe précédent.

Soit G un graphe connexe, et soit u une fonction définie sur ses sommets. On définit la forme quadratique

$$E_G(u) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))^2$$

où $x \sim y$ signifie que x et y sont adjacents. Cette forme s'appelle l'énergie du graphe. On lui associe la forme bilinéaire

$$E_G(u, v) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))$$

Il est clair qu'il s'agit d'une forme bilinéaire, symétrique, semi-définie positive. De plus, $E_G(u) = 0$ si u est constante, et elle vérifie la propriété de Markov.

On sait aussi que $\mathcal{F}(\mathcal{S}) / \sim$ est un espace de Hilbert. on a donc notre forme de Dirichlet.

Dans ce qui suit, pour un système autosimilaire $(K, \{f_i \mid i \in J\})$, on note $F = \cup_{i \in J} f_i$, et on définit récursivement $V_{m+1} = F(V_m)$ pour un ensemble initial V_0 .

3.1 Application à l'ensemble autosimilaire $[0, 1]$

Soit le système autosimilaire $(I, \{f_1, f_2\})$, avec $I = [0, 1]$, $f_1(x) = \frac{1}{2}x$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$. Soit $V_0 = \{0, 1\}$. On commence par construire une extension harmonique u' associée à $E_G(u)$, pour une fonction u définie sur V_0

$$E_0(u) = (u(1) - u(0))^2$$

$$E_1(u') = \left(u'(1) - u'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(u'\left(\frac{1}{2}\right) - u'(0)\right)^2$$

Il faut alors définir $u'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u(1) + u(0))$.

Maintenant, en passant de V_m à V_{m+1} et soit $k = 2j + 1$ un nombre impair, il s'agit des nouveaux points, les k pairs étant déjà dans V_m .

Soit u définie sur V_m , alors $u'\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right)$ apparaît deux fois dans l'expression de l'énergie :

$$\left(u'\left(\frac{2j+2}{2^{m+1}}\right) - u'\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right)\right)^2 + \left(u'\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right) - u'\left(\frac{2j}{2^{m+1}}\right)\right)^2$$

et la minimisation devient un problème local :

$$u'\left(\frac{2j+1}{2^{m+1}}\right) = \frac{1}{2} \left(u\left(\frac{2j+2}{2^{m+1}}\right) + u\left(\frac{2j}{2^{m+1}}\right)\right)$$

donc

$$E_{m+1}(u') = \frac{1}{2}E_m(u)$$

d'où l'énergie normalisée :

$$\mathcal{E}_m(u) = r^{-m}E_m(u)$$

avec $r = \frac{1}{2}$. On peut alors expliciter cette formule

$$\mathcal{E}_m(u) = 2^{-m} \sum_{i=1}^{2^m} \left(u\left(\frac{i}{2^m}\right) - u\left(\frac{i-1}{2^m}\right)\right)^2$$

Soit $Dom(\mathcal{E}) = \{u \in l(V_*) \mid \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_m(u) < \infty\}$. On définit

$$\mathcal{E}(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_m(u)$$

pour $u \in Dom(\mathcal{E})$. On aimerait maintenant définir le laplacien dans un point particulier. On pourra pour cela définir le laplacien discret en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction f de classe $C^2(I)$, pour $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in I$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$

On en déduit :

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) + O(h)$$

Définissons maintenant le laplacien sur le graphe V_m par :

$$\Delta_m u(x) = \sum_{y \sim x} (u(x) - u(y)) \quad \forall x \in V_m \setminus V_0$$

Supposons maintenant que nous avons une relation faible de la forme

$$\mathcal{E}(u, v) = - \int_I f v \, d\mu \quad \forall v \in \text{Dom}(\mathcal{E}_0)$$

Soit alors ψ_x^m la fonction d'interpolation affine qui vérifie $\psi_x^m(y) = \delta_{xy}$ pour tout $(x, y) \in I^2$, cela donne $\mathcal{E}(u, \psi_x^m) = -r^{-m} \Delta_m u(x)$ donc

$$r^{-m} \Delta_m u(x) = \int_I f \psi_x^m \, d\mu \approx f(x) \int_I \psi_x^m \, d\mu$$

en utilisant le fait que f est continue et que le support de ψ_x^m est proche de x . On obtient donc

$$\Delta u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} r^{-m} \left(\int_I \psi_x^m \, d\mu \right)^{-1} \Delta_m u(x)$$

Il nous reste à calculer le terme $\left(\int_I \psi_x^m \, d\mu \right)^{-1}$. Dans notre cas, il s'agit d'une fonction tente, son intégrale est l'aire d'un triangle de hauteur 1 et de base $2 \times \frac{1}{2^m}$, donc $\left(\int_I \psi_x^m \, d\mu \right)^{-1} = 2^m$. Sachant que $r^{-m} = 2^m$ on obtient exactement la limite du laplacien discret

$$\Delta u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m u(x)$$

3.2 Application au triangle de Sierpiński

On considère le cas du système autosimilaire $(SG, \{f_0, f_1, f_2\})$, où $V_0 = \{p_0, p_1, p_2\}$ désigne l'ensemble des sommets d'un triangle, et où, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$: $f_i(x) = \frac{1}{2}(x - q_i) + q_i$. On construit, pour une fonction u définie sur V_0 , une extension harmonique u' associée à $E_G(u)$, soit $u(q_0) = a$, $u(q_1) = b$ et $u(q_2) = c$:

$$E_0(u) = (b - a)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2$$

Posons $u'(f_0(q_1)) = x$, $u'(f_0(q_2)) = y$ et $u'(f_1(q_2)) = z$. Alors :

$$E_1(u') = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - a)^2 + (y - c)^2 + (y - z)^2 + (z - b)^2 + (z - c)^2$$

Pour minimiser cette quantité, on calcule son gradient qui s'annule en principe au minimum, ceci donne le système d'équations suivant :

$$4x = a + b + y + z$$

$$4y = a + c + x + z$$

$$4z = b + c + x + y$$

la somme

$$x + y + z = a + b + c$$

implique

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a + 2b + c}{5} \\ y &= \frac{2a + b + 2c}{5} \\ z &= \frac{a + 2b + 2c}{5} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie :

$$\begin{aligned}
E_1(u') &= \left(\frac{2b+c-3a}{5}\right)^2 + \left(\frac{2a+c-3b}{5}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{5}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{5}\right)^2 + \left(\frac{b+2c-3a}{5}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{2a+b-3c}{5}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{5}\right)^2 + \left(\frac{a+2c-3b}{5}\right)^2 + \left(\frac{a+2b-3c}{5}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2(b-a)+(c-a)}{5}\right)^2 + \left(\frac{2(a-b)+(c-b)}{5}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{5}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{5}\right)^2 + \left(\frac{(b-a)+2(c-a)}{5}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{2(a-c)+(b-c)}{5}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{5}\right)^2 + \left(\frac{(a-b)+2(c-b)}{5}\right)^2 + \left(\frac{(a-c)+2(b-c)}{5}\right)^2 \\
&= \left(\frac{b-c}{5}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{5}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{5}\right)^2 \\
&+ 5\left(\frac{b-a}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{c-a}{5}\right)^2 + \frac{8(b-a)(c-a)}{25} \\
&+ 5\left(\frac{a-b}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{c-b}{5}\right)^2 + \frac{8(a-b)(c-b)}{25} \\
&+ 5\left(\frac{a-c}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{b-c}{5}\right)^2 + \frac{8(a-c)(b-c)}{25} \\
&= 11\left(\frac{b-c}{5}\right)^2 + 11\left(\frac{a-c}{5}\right)^2 + 11\left(\frac{a-b}{5}\right)^2 + \frac{8(b-a)(c-a)}{25} + \frac{8(a-b)(c-b)}{25} + \frac{8(a-c)(b-c)}{25} \\
&= \frac{19}{25}(b-a)^2 + \frac{19}{25}(a-c)^2 + \frac{11}{25}(b-c)^2 + \frac{8}{25}(a-c)(b-a) \\
&= \frac{3}{5}((b-a)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \\
&= \frac{3}{5}E_0(u)
\end{aligned}$$

on obtient donc un facteur de normalisation égal à $r = \frac{3}{5}$.

Maintenant, en passant, pour un rang $m \in \mathbb{N}$ donné, de V_m à V_m+1 , on applique la même idée. Chaque nouveau point de V_{m+1} appartient à une m -cellule $f_w(SG)$ avec $|w| = m$. Alors :

$$E_{m+1}(u') = \sum_{|w|=m} (E_1(u' \circ f_w))$$

et le problème de minimisation nous permet de définir l'énergie normalisée :

$$\mathcal{E}_m(u) = r^{-m} E_m(u)$$

avec $r = \frac{3}{5}$, et on définit

$$\mathcal{E}(u) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_m(u)$$

pour $u \in \text{Dom}(\mathcal{E})$.

On définit le laplacien en un point particulier de manière similaire à la section précédente par :

$$\Delta_m u(x) = \sum_{y \sim x} (u(x) - u(y)) \quad x \in V_m \setminus V_0$$

Supposons maintenant que nous ayons une relation faible de la forme

$$\mathcal{E}(u, v) = - \int_{SG} f v \, d\mu \quad \forall v \in \text{Dom}(\mathcal{E})$$

Soit alors ψ_x^m la fonction d'interpolation qui vérifie pour une m -cellule $F_w K$ de sommets x, y et z : $\psi_x^m + \psi_y^m + \psi_z^m = 1$, alors :

$$\int_{F_w K} (\psi_x^m + \psi_y^m + \psi_z^m) d\mu = \mu(F_w K) = \frac{1}{3^m}$$

et par symétrie on obtient $\int_{F_w} \psi_x^m d\mu = \mu(F_w K) = \frac{1}{3^{m+1}}$, et si on prend en compte la contribution des autres m -cellules on trouve $\int_{SG} \psi_x^m d\mu = \mu(F_w K) = \frac{2}{3^{m+1}}$ d'où $(\int_{SG} \psi_x^m d\mu)^{-1} = \frac{3}{2} \times 3^{m+1}$.

Étant donné que $r^{-m} = \left(\frac{5}{3}\right)^m$ on trouve finalement :

$$\Delta u(x) = \frac{3}{2} \lim_{m \rightarrow +\infty} 5^m \Delta_m u(x)$$

3.3 Application au graphe de la fonction de Weierstrass

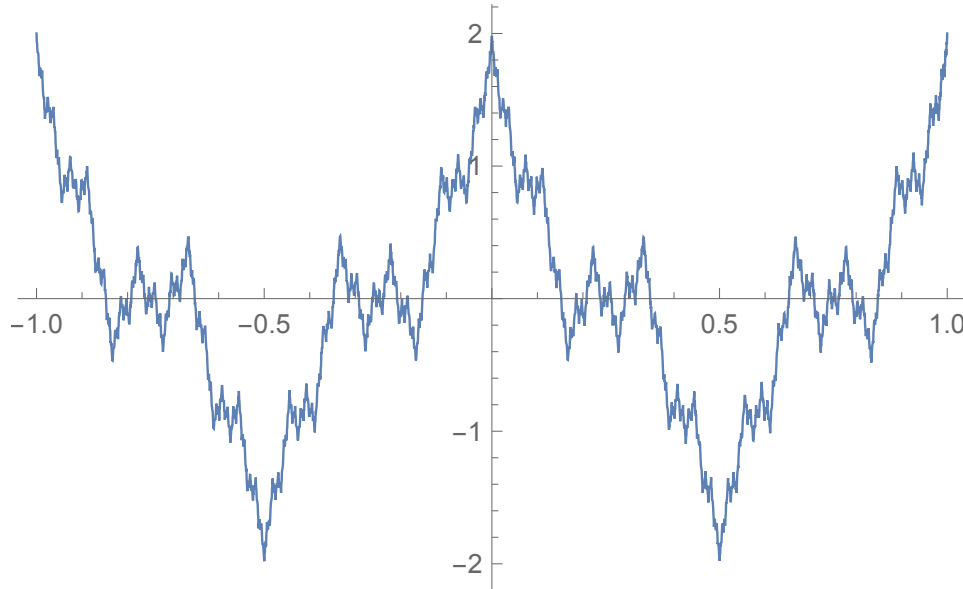
Considérons la fonction de Weierstrass de paramètres λ, b , introduite en 1872 par K. Weierstrass comme contre-exemple à l'assertion que toute fonction continue est dérivable sauf en un ensemble dénombrable. Selon quelques auteurs elle est plutôt due à B. Riemann qui, en 1861, démontre qu'elle est non-dérivable sur un ensemble dense de réels mais il n'est pas sûr qu'il ait donné une démonstration complète de cette proposition, et c'est Hardy [4] qui démontre en 1916 qu'elle n'est nulle part différentiable pour des cas particuliers...

Cette fonction est définie, pour tout réel x , par :

$$W_{\lambda,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\pi b^n x)$$

avec $b > 1$, $\frac{1}{b} < \lambda < 1$. Il s'agit d'une fonction nulle part différentiable [4]. On considère dans ce qui suit le cas où $b \in \mathbb{N}$.

La figure suivante donne le graphe de cette fonction pour $b = 3$ et $\lambda = \frac{1}{2}$:



La restriction du graphe de cette fonction aux points $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ peut être considéré comme un système de fonctions itérées des fonctions non-linéaires

$$T_i(x, y) = (T_i^a(x), T_i^b(y)) := \left(\frac{x+i}{b}, \lambda y + \cos\left(2\pi\left(\frac{x+i}{b}\right)\right) \right), \quad i = 0, \dots, b-1$$

On peut démontrer qu'il s'agit d'un système de contractions strictes :

$$\begin{aligned}\|T_i(x, y) - T_i(z, t)\| &= \left\| \left(\frac{x-z}{b}, \lambda(y-t) + \left(\cos \left(2\pi \left(\frac{x+i}{b} \right) \right) - \cos \left(2\pi \left(\frac{z+i}{b} \right) \right) \right) \right) \right\| \\ &\leq \left(\sup_{(u,v) \in [x,z] \times [y,t]} \|DT_i(u, v)\| \right) \|(x, y) - (z, t)\|\end{aligned}$$

avec

$$DT_i(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{2\pi}{b} \sin \left(2\pi \left(\frac{x+i}{b} \right) \right) & \lambda \end{pmatrix}$$

Sachant que le rayon spectral $\rho(DT_i(x, y))$ vaut $\max \left\{ \frac{1}{b}, \lambda \right\} < 1$ pour $i = 0, \dots, b-1$, il s'agit donc bien de contractions (il existe une norme telle que $\|DT_i(x, y)\| < 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$). On désignera désormais ce système autosimilaire par $(W, \{T_0, \dots, T_{b-1}\})$. Soit $V_0 = \{p_0, \dots, p_{b-1}\}$ et $p_i = \left(\frac{i}{b-1}, \frac{\cos(2\pi \frac{i}{b-1})}{1-\lambda} \right)$ le point fixe de T_i .

On construit successivement, pour tout entier naturel non nul m , les graphes $V_m = T(V_{m-1})$ avec

$$T = \cup_{i=0}^{b-1} T_i$$

Pour construire une extension harmonique u' d'une fonction u sur ce graphe par rapport à l'énergie E_G , de manière similaire à ce qui précède, on écrit :

$$E_0(u) = (u(p_0) - u(p_1))^2 + (u(p_1) - u(p_2))^2 + \dots + (u(p_{b-2}) - u(p_{b-1}))^2$$

Pour $i, j = 0, \dots, b-1$, soit $x_i^j = u'(T_i(p_j))$.

$$E_1(u) = (x_0^0 - x_1^0)^2 + \dots + (x_{b-2}^0 - x_{b-1}^0)^2 + \dots + (x_0^{b-1} - x_1^{b-1})^2 + \dots + (x_{b-2}^{b-1} - x_{b-1}^{b-1})^2$$

On peut ôter l'indice j , et noter $x_0^0 = u_0$ et $x_1^1 = u_1$, puisque la minimisation donne le système local suivant :

$$\begin{aligned}2x_1 - u_0 - x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ 2x_{b-1} - u_1 - x_{b-2} &= 0\end{aligned}$$

Il faut donc déterminer le noyau de la matrice L de $\mathcal{M}_{b-1, b+1}(\mathbb{R})$:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$\ker(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b-1 \\ b-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On cherche alors à déterminer les réels α et β tels que :

$$(u_0, x_1, \dots, x_{b-2}, u_1) = \alpha(1, \dots, 1) + \beta(b, \dots, 0)$$

On obtient : $\alpha = u_1$ et $\beta = \frac{u_0 - u_1}{b}$, et peut conclure que

$$x_i = \alpha + \beta(b - i) \quad (9)$$

$$= \frac{iu_1 + u_0(b - i)}{b} \quad (10)$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie, , on en déduit :

$$\begin{aligned} E_1(u) &= b\left(\frac{u_1 - u_0}{b}\right)^2 + \dots + b\left(\frac{u_{b-2} - u_{b-1}}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b}E_0(u) \end{aligned}$$

Le rapport de normalisation est donc de $r = \frac{1}{b}$, on peut vérifier la relation pour les ordres supérieurs. Soit alors le laplacien :

$$\Delta_m u(x) = \sum_{y \sim x} (u(x) - u(y)) \quad \forall x \in V_m \setminus V_0$$

Soit maintenant $w = w_1 w_2 \dots w_m$ une adresse de longueur $m \in \mathbb{N}^*$ avec $p_j = (x_j, y_j)$ et $x_j = T_w(P_j)$ pour $j \in \{0, \dots, b-1\}$, où $x \in V_m \setminus V_{m-1}$, et sachant que chaque sommet a exactement deux voisins, on s'intéresse à la fonction d'interpolation $\psi_{x_j}^m$. $\int_W \psi_{x_j}^m d\mu$ est la somme de la surface de deux triangles droits de hauteur 1 et de bases de longueurs respectives $\|T_w(p_j) - T_w(p_{j-1})\|$ et $\|T_w(p_j) - T_w(p_{j+1})\|$, en utilisant la formule de la fonction de Weierstrass :

$$\begin{aligned}
T_w(p_j) - T_w(p_{j-1}) &= \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{b^m}, \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (\cos(2\pi b^n (x_j b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i)) \right. \\
&\quad \left. - \cos(2\pi b^n (x_{j-1} b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i))) \right) \\
&= \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{b^m}, \sum_{n=0}^{m-1} \lambda^n (\cos(2\pi b^n (x_j b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i)) \right. \\
&\quad \left. - \cos(2\pi b^n (x_{j-1} b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i))) \right) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+m} (\cos(2\pi b^{n+m} (x_j b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i)) \\
&\quad - \cos(2\pi b^{n+m} (x_{j-1} b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i))) \\
&= \left(\frac{1}{(b-1)b^m}, S_1 + S_2 \right)
\end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+m} (\cos(2\pi b^n (x_j + \sum_{i=1}^m b^{m-i} w_i)) - \cos(2\pi b^n (x_{j-1} + \sum_{i=1}^m b^{m-i} w_i))) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+m} (\cos(2\pi b^n x_j) \cos(2\pi b^n \sum_{i=1}^m b^{m-i} w_i) - \sin(2\pi b^n x_j) \sin(2\pi b^n \sum_{i=1}^m b^{m-i} w_i)) \\
&\quad - (\cos(2\pi b^n x_{j-1}) \cos(2\pi b^n \sum_{i=1}^m b^{m-i} w_i) - \sin(2\pi b^n x_{j-1}) \sin(2\pi b^n \sum_{i=1}^m b^{m-i} w_i)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+m} (\cos(2\pi b^n x_j) - \cos(2\pi b^n x_{j-1})) \\
&= \Delta_y^{j-1} \lambda^m
\end{aligned}$$

avec $\Delta_y^{j-1} := y_j - y_{j-1} = \frac{\cos(2\pi \frac{j}{b-1}) - \cos(2\pi \frac{j-1}{b-1})}{1 - \lambda}$. D'autre part

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} \lambda^n \left(\cos \left(2\pi b^n \left(x_j b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i \right) \right) - \cos \left(2\pi b^n \left(x_{j-1} b^{-m} + \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i \right) \right) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{m-1} -2\lambda^n \sin \left(\pi b^n \left((x_j + x_{j-1}) b^{-m} + 2 \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i \right) \right) \sin \left(\pi b^{n-m} (x_j - x_{j-1}) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{m-1} -2\pi \lambda^n b^{n-m} (x_j - x_{j-1}) \sin \left(\pi b^n \left((x_j + x_{j-1}) b^{-m} + 2 \sum_{i=1}^m b^{-i} w_i \right) \right) \times \frac{\sin \left(\pi b^{n-m} (x_j - x_{j-1}) \right)}{\pi b^{n-m} (x_j - x_{j-1})} \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} 2\pi \lambda^n b^{n-m} (x_j - x_{j-1}) \\
&= 2\pi b^{-m} (x_j - x_{j-1}) \frac{1 - (\lambda b)^m}{1 - \lambda b} \\
&= 2\pi \frac{1}{(b-1)b^m} \frac{(\lambda b)^m - 1}{\lambda b - 1} \\
&\leq 2\pi \frac{(\lambda)^m}{(b-1)(\lambda b - 1)}
\end{aligned}$$

Il existe donc un couple $(\eta_1, \eta_2) \in]-1, 1[\times]-1, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned}
\int_W \psi_x^m(y) d\mu &= \frac{1}{2} (\|T_w(p_i) - T_w(p_{i-1})\|_2 + \|T_w(p_i) - T_w(p_{i+1})\|_2) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{(b-1)b^m} \right)^2 + \left(\Delta_y^{j-1} \lambda^m + 2\pi \eta_1 \frac{(\lambda)^m}{(b-1)(\lambda b - 1)} \right)^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{(b-1)b^m} \right)^2 + \left(\Delta_y^{j+1} \lambda^m + 2\pi \eta_2 \frac{(\lambda)^m}{(b-1)(\lambda b - 1)} \right)^2} \right) \\
&= \delta_m
\end{aligned}$$

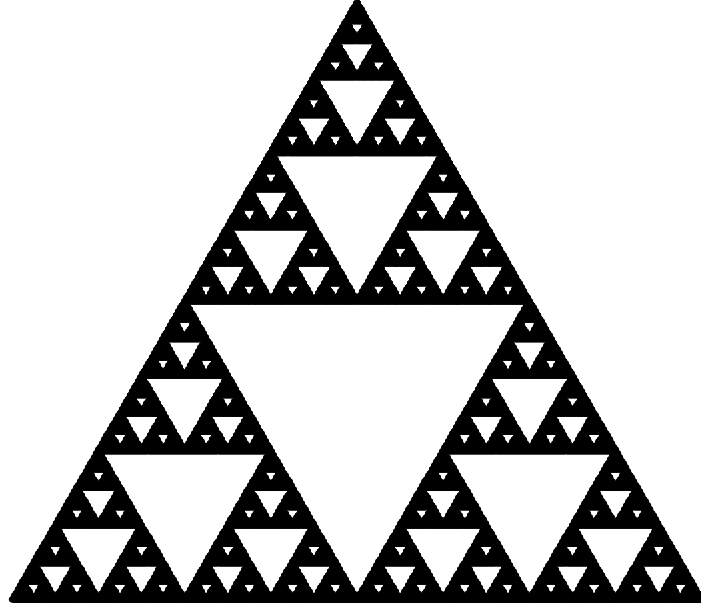
Finalement

$$\Delta u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} b^m \delta^{-m} \Delta_m u(x)$$

3.4 Mise en œuvre sous Mathematica

L'implémentation numérique des résultats précédents a été effectuée avec Mathematica. Le cas de l'intervalle $[0, 1]$ est trivial, le triangle de Sierpiński est plus intéressant.

On considère, à cet effet, le triangle équilatéral défini, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par ses trois sommets $V_0 = \{p_0, p_1, p_2\}$ avec $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (1, 0)$ et $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Soit la suite de graphes définie récursivement pour tout entier m par $V_{m+1} = \cup_{i=0}^2 f_i(V_m)$ et on fait tendre m vers l'infini, le résultat obtenu à la dixième opération est :



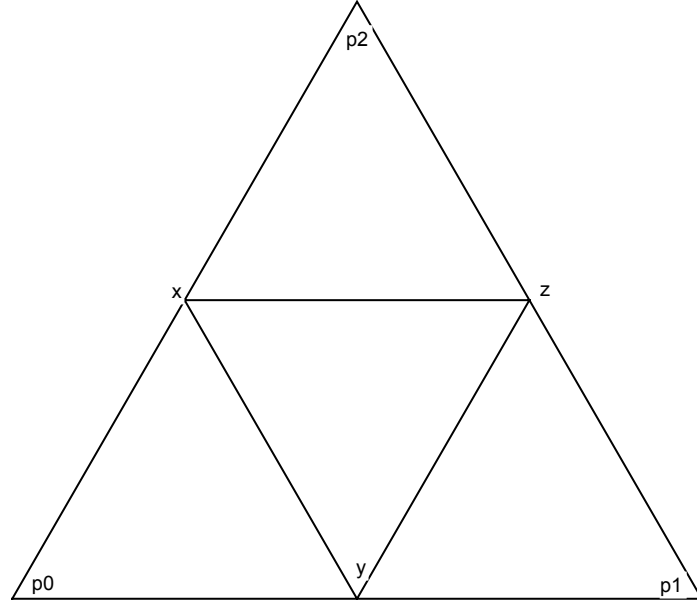
Pour définir le laplacien comme dans la section précédente, j'ai trouvé intéressant de me baser sur la notion d'adresse. Soit alors une m -cellule du graphe V_m , et soit $x \notin V_0$ un de ses sommets, ce point peut être défini par son adresse de la façon suivante :

Étant donné un sommet initial p_i , $x = f_w(p_i)$ avec $w \in \{0, 1, 2\}^m$, on décompose $w = \tilde{w}j$ avec $\tilde{w} \in \{0, 1, 2\}^{m-1}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$. On pourra vérifier que x a une double adresse $x = f_{\tilde{w}j}(p_i) = f_{\tilde{w}i}(p_j)$, on pourra aussi déduire les quatre plus proches voisins dans ce graphe comme étant

$$\{\cup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 f_{\tilde{w}j}(p_k); \cup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 f_{\tilde{w}i}(p_k)\}$$

qui serviront au calcul du Δ_m .

On reporte ci-joint un exemple : soit le triangle de sommets V_0 et $x = f_0(p_2) = f_2(p_0)$, ses voisins sont $p_0 = f_0(p_0)$, $p_2 = f_2(p_2)$, $y = f_0(p_1)$ et $z = f_2(p_1)$.

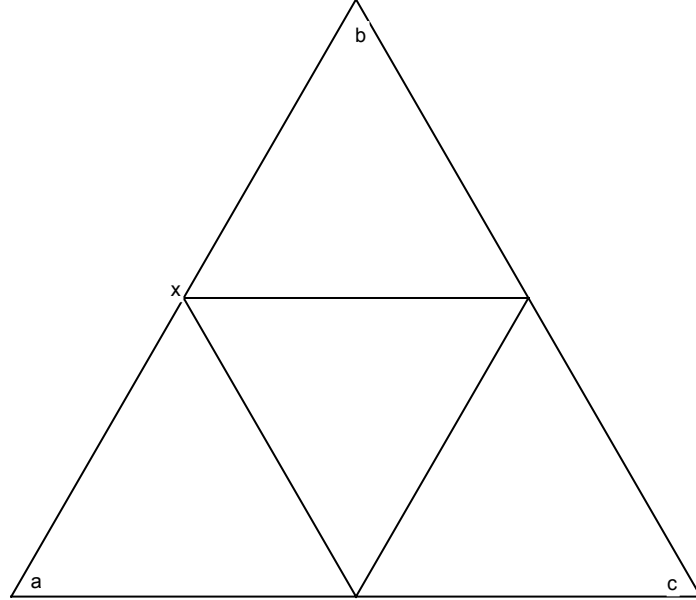


Pour calculer la limite, il suffit de remarquer que pour une $m + l$ -cellule, les quatre voisins sont

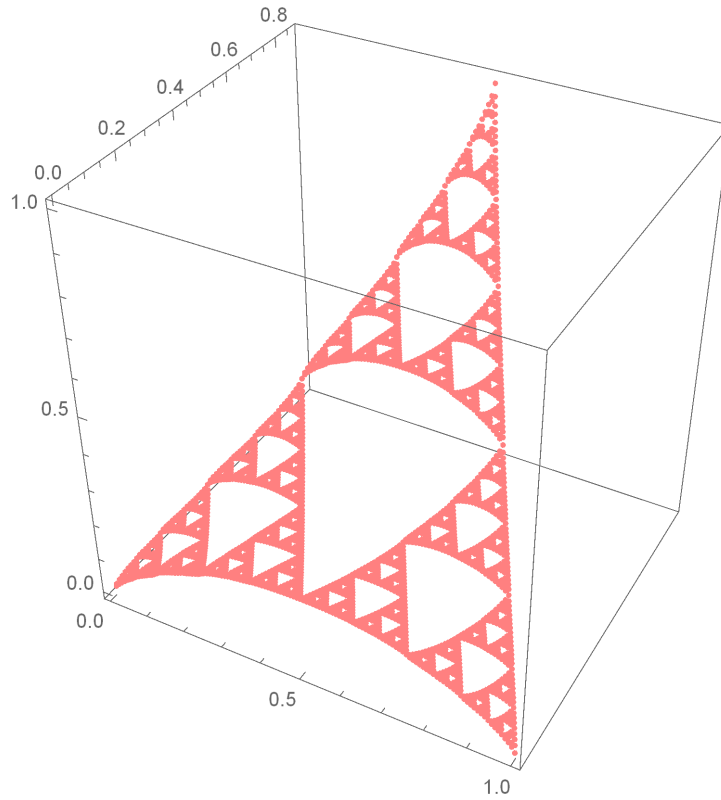
$$\{\cup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 f_{\tilde{w}j} f_j^l(p_k); \cup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 f_{\tilde{w}i} f_i^l(p_k)\}$$

et on pourra faire tendre l vers l'infini.

Pour la construction de l'extension harmonique d'une fonction on procède de façon similaire. Sachant que la valeur d'une fonction sur un point du graphe V_m est fonction de sa valeur sur les trois sommets du m -triangle, cela nous amène à définir récursivement cette fonction. Étant donné un point $x = f_{\tilde{w}j}(p_i)$ du m -triangle, les deux plus proches sommets du triangle contenant ce point sont donnés par $a = f_{\tilde{w}}(p_i)$ et $b = f_{\tilde{w}}(p_j)$ et le troisième sommet est donné par $c = f_{\tilde{w}}(p_k)$ avec $k \neq i, j$. Par exemple, pour le triangle de sommets V_0 et $x = f_0(p_2) = f_2(p_0)$, ses plus proches voisins sont $a = p_0$ et $b = p_2$, le troisième sommet étant $c = p_1$.

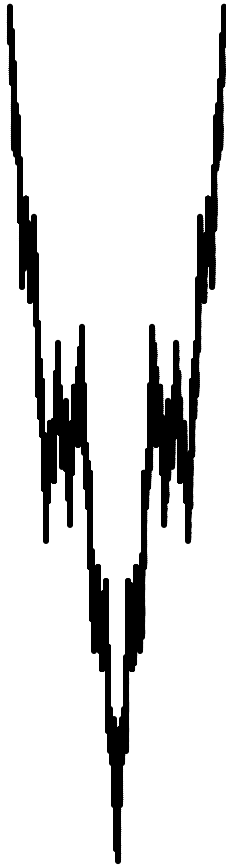


On reporte ci dessous la valeur de cette fonction pour le cas $u(p_0) = u(p_1) = 0$ et $u(p_2) = 1$ pour 10 itérations :



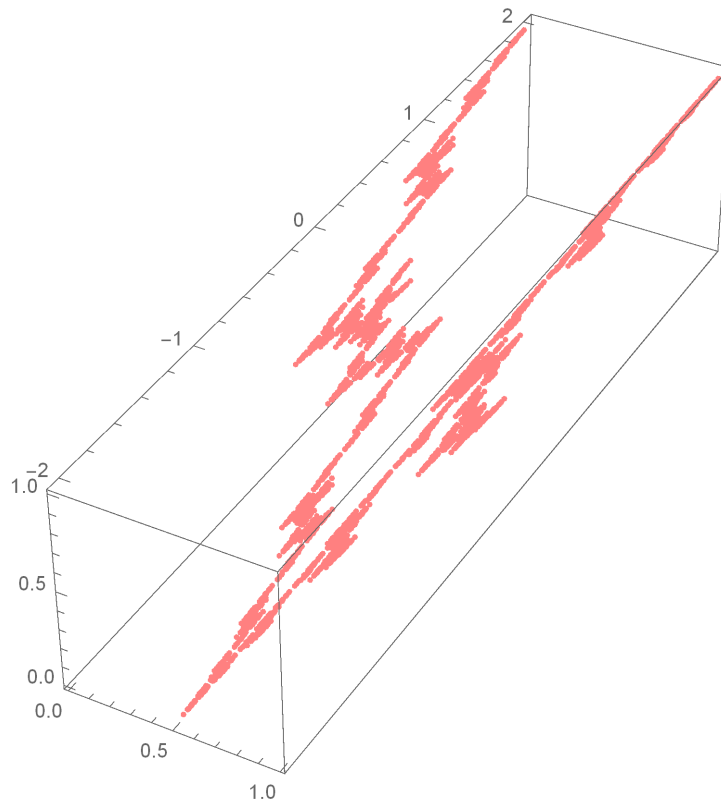
On peut construire de manière similaire le graphe de la fonction de Weierstrass. Soit $b = 3$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, on définit les trois sommets $V_0 = \{p_0, p_1, p_2\}$ avec $p_0 = (0, 2)$, $p_1 = (\frac{1}{2}, -2)$ et $p_2 = (1, 2)$. Soit notre suite de graphes $V_{m+1} = \cup_{i=0}^2 T_i(V_m)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et on faisant tendre m vers l'infini, on reporte

ci-dessous le résultat de cette opération à la dixième itération :



On construit l'extension harmonique d'une fonction de la même façon. Sachant que la valeur d'une fonction sur un point du graphe V_m est fonction de sa valeur sur deux sommets, on définit récursivement cette fonction.

On reporte ci dessous la valeur de cette fonction pour le cas $u(p_0) = u(p_1) = 0$ et $u(p_2) = 1$ pour 10 itérations :



On sait que dans ce cas particulier le laplacien est égal à :

$$\Delta u(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} 3^m \delta^{-m} \Delta_m u(x)$$

avec :

$$\delta_m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 3^m}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\eta_1 - 4}{2^m}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \times 3^m}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\eta_2 - 4}{2^m}\right)^2} \right)$$

A Annexes

A.1 Espace mesuré

Définition A.1. Une classe \mathcal{P} de partie d'un ensemble \mathcal{E} est appelée tribu si :

1. elle contient \mathcal{E} .
2. elle est stable par passage au complémentaire.
3. elle est stable par réunion dénombrable.

On dit que $(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ est un espace mesurable

Définition A.2. Une mesure positive sur l'espace $(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ est une application $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. pour toute suite (A_n) d'éléments de \mathcal{P} deux à deux disjoints, $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.

On dit que $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mu)$ est un espace mesuré.

A.2 Formes de Dirichlet

Soit X un espace métrique localement compact. Soit μ une mesure de Borel sur X telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K et $\mu(O) > 0$ pour tout ouvert non-vide O .

Définition A.3. Soit \mathcal{E} une forme de bilinéaire sur $X \times X$. On dit qu'elle est semi-définie positive si elle vérifie :

$$\mathcal{E}(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in X$$

Définition A.4. Soit \mathcal{E} une forme de bilinéaire, symétrique, définie positive sur un domaine $D \subset X$. On dit que cette forme est fermée si

1. D est dense dans $L^2(X, \mu)$.
2. D muni du produit scalaire $(u, v)_{\mathcal{E}} = (u, v)_{L^2(X, \mu)} + \mathcal{E}(u, v)$ est un espace de Hilbert.

Définition A.5. Soit \mathcal{E} une forme fermée sur $l^2(X, \mu)$, et soit $\mathcal{F} = \text{Dom}(\mathcal{E})$.

1. Un sous-ensemble C de $\mathcal{F} \cap C_0$ est appelé un "core" de $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ si et seulement si C est dense dans \mathcal{F} par rapport à la norme $(u, v)_{\mathcal{E}}$ et $C_0(X)$ par rapport à la norme sup.
2. On dit que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ a la propriété locale si $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$ pour $u, v \in \mathcal{F}$, $\text{supp}(u)$ et $\text{supp}(v)$ sont compacts et d'intersection vide.

Une forme de Dirichlet qui la propriété locale est dite une forme de Dirichlet locale.

Définition A.6. Un opérateur autoadjoint, semi-défini positif H sur un espace de Hilbert \mathcal{H} a une résolvante compacte si la résolvante $\{H + I\}^{-1}$ est un opérateur compact.

Références

- [1] K. BARANSKI Dimension of the graphs of the Weierstrass-type functions. *Springer International Publishing* (2015).
- [2] M. V. BERRY et Z. V. LEWIS On the Weierstrass-Mandelbrot Fractal Function. *H. H. Wills Physics Laboratory* (1979).
- [3] K. FALCONER Fractal Geometry : Mathematical Foundation and Applications. *John Wiley and Son* (2003).
- [4] G. H. HARDY Weierstrass's Non-Differentiable Function. *Transactions of the American Mathematical Society* (1916).
- [5] J. KIGAMI Analysis on Fractals. *Cambridge University Press* (2001).
- [6] J. KIGAMI R. S. STRICHARTZ, et WALKER K. C. Constructing a Laplacian on the Diamond Fractal. *Experimental Mathematics* 10 :3 (2001).
- [7] B. MANDELBROT The Fractal Geometry of Nature. *W. H. Freeman* (1983).
- [8] R. S. STRICHARTZ Differential Equations on Fractals. *Princeton University Press* (2006).
- [9] R. S. STRICHARTZ Analysis on Fractals. *Notices of the AMS* (Novembre 1999).